

國中教育會考考前大特搜

第 23 期 / 編撰教師：柳源裕老師



特搜 1-平方根與勾股定理

重要性：★★★★★

一、平方根的意義：

對於一正數 a ，若一數 b 的平方等於 a ，即 $b^2 = a$ ，就稱 b 是 a 的平方根

；相反的，若 b 是 a 的平方根則可列出 $b^2 = a$ 的等式。

二、平方根的性質：

(1) 每一個正數都有兩個平方根，一個為正數，一個為負數，

且此兩數互為相反數。

(2) 0 的平方根只有一個，就是 0；

(3) 式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 稱為 a 的正平方根。

(4) 若 $a > 0$ ，則 a 的兩個平方根為 $\sqrt{a}$ 、 $-\sqrt{a}$ 。

因為任意實數的平方，均大於或等於零，所以負數沒有實數的平方根。

(5) 求一個數 a 的平方根的運算，我們就稱為開根號。

(6) 若 $a \geq 0$ ，則 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。

※ 觀念釐清：

1. 若 $a > 0$ ，則 $\sqrt{a}$ 與 a 的平方根意義不同，

(1) $\sqrt{a}$ 只是一個數。 (2) a 的平方根是 $\sqrt{a}$ 、 $-\sqrt{a}$ ，兩個數。



$$2. \sqrt{a^2} = |a| \text{ (依照 } a \text{ 的正負去作去絕對值的運算)}$$

$$3. \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| \text{ (依照 } a-b \text{ 的正負去作去絕對值的運算)}$$

三、完全平方數：

今 a 、 b 為整數，若 $b = a^2$ ，則 b 稱為完全平方數。

例：因為 $16 = 4^2$ ，所以 16 為完全平方數。

四、利用標準分解式求值：

1. 若 a 為正整數，且 a 為完全平方數，可利用 a 的標準分解式求 $\sqrt{a}$ 的值。

2. 若 a 為正小數，先將 a 化為分數，再利用標準分解式求 $\sqrt{a}$ 的值。



五、比較平方根的大小：

$$1. a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$$

$$2. a > b > c > 0, \text{ 則:}$$

$$(1) \sqrt{a} > \sqrt{b} > \sqrt{c}$$

$$(2) a^2 > b^2 > c^2$$

$$3. a > b \xLeftrightarrow{a, b > 0} a^2 > b^2$$

$$4. a > b \xLeftrightarrow{a, b > 0} \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

同德高中部繁星說明會

5/23(六)10:00~12:00

同德高中部入學測驗

5/23(六)09:00~12:00



5. 無理數之近似值求法：

若 a 為正整數，且 a 不為完全平方數，則 $\sqrt{a}$ 為一無限小數。

(例： $\sqrt{3} = 1.732050\dots$)

(1) 利用 **十分逼近法** 求得近似值。

在數線上，若 $a_1 < \sqrt{N} < a_2$ ，則把 a_1 和 a_2 之間分成十等分，進而求得 $\sqrt{N}$ 的近似值。

(2) 利用 **查表法** 求得近似值。(常考)

除了使用十分逼近法求平方根的近似值之外，也可以使用乘方開方表。

(3) 利用 **電算器** 求得近似值。

直接使用計算機說明並操作。

六、根式的化簡：

1. 若一正數 a 可分解成 $a = b^2 \times c$ ，其中 b 是正整數、正小數或正分數，

c 是正整數，且 c 的因數中，除了1以外，沒有其他大於1的完全平方數，

則： $\sqrt{a} = \sqrt{b^2 \times c} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{c} = b\sqrt{c}$ 。

習慣上，吾人將 $\sqrt{a}$ 簡化成 $b\sqrt{c}$ 的這個過程稱為化簡根式，

而 $b\sqrt{c}$ 稱為二次方根 $\sqrt{a}$ 的最簡式或最簡根式。



2. 下列三種情形都不是最簡根式：

(1) 根號內為正整數，且此正整數含有質數平方的因數。

例： $\sqrt{8}$ ， $\sqrt{12}$ 。



(2) 根號內為小數或分數。

例： $\sqrt{1.6}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

(3) 分母為根式。

例： $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ， $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 。

同德高中部繁星說明會

5/23(六)10:00~12:00

同德高中部入學測驗

5/23(六)09:00~12:00

七、有理化分母的運算：

根式相除的結果中，如果分母為根式，為了化簡成最簡根式，

吾人要將分母轉化成整數，這樣的過程稱為有理化分母，

即使分母不帶有根式的化簡過程。

八、勾股定理：

任一直角三角形，兩股平方之和等於斜邊長的平方，

九、畢氏數：

1. 若 a 、 b 、 c 三正整數滿足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，則稱 (a, b, c) 為一組畢氏數。

2. 常見的畢氏數有：

$(3, 4, 5)$ ， $(5, 12, 13)$ ， $(7, 24, 25)$ ， $(8, 15, 17)$ ， $(9, 40, 41)$ ，

$(2, 1, \sqrt{3})$ ， $(1, 1, \sqrt{2})$ ， $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ， $\cdots$ 等等。

※重要觀念：

1. 若 a 、 b 、 c 三正數為一組畢氏數，且 $k > 0$ 則 ka 、 kb 、 kc 三正數也是一組畢氏數。
2. 一直角三角形之三邊長必為一組畢氏數。
3. 以一組畢氏數作為三角形之三邊長，此三角形必為直角三角形。

十、坐標平面上兩點距離：

已知，在直角坐標平面上，今有 $A(a_1, b_1)$ ， $B(a_2, b_2)$ ，則：

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}。$$

柳哥陪你考

1. (B) 若 $\sqrt{44} = 2\sqrt{a}$ ， $\sqrt{54} = 3\sqrt{b}$ ，則 $a+b$ 之值為何？〔108. 會考〕

- (A) 13
(B) 17
(C) 24
(D) 40。



同德高中部繁星說明會
5/23(六)10:00~12:00

詳解： $\sqrt{44} = \sqrt{2^2 \times 11} = 2\sqrt{11}$

$$\therefore a = 11 \quad \sqrt{54} = \sqrt{2 \times 3^3} = 3\sqrt{6} \quad \therefore b = 6$$

$$\text{故 } a+b = 11+6 = 17$$

2. (B) 如圖，某計算機中有 $\sqrt{}$ 、 $1/x$ 、 x^2 三個按鍵，以下是這三個按鍵的功能。

(1) $\sqrt{}$ ：將螢幕顯示的數變成它的正平方根，

例如：螢幕顯示的數為 49 時，按下 $\sqrt{}$ 後會變成 7。

(2) $1/x$ ：將螢幕顯示的數變成它的倒數，

例如：螢幕顯示的數為 25 時，按下 $1/x$ 後會變成 0.04。



(3) x^2 ：將螢幕顯示的數變成它的平方，

例如：螢幕顯示的數為 6 時，按下 x^2 後會變成 36。

若螢幕顯示的數為 100 時，小劉 第一下按 $\sqrt{}$ ，第二下按 $1/x$ ，第三下按 x^2 ，之後以 $\sqrt{}$ 、 $1/x$ 、 x^2 的順序輪流按，則當他按了第 100 下後螢幕顯示的數是多少？〔106. 會考〕



同德高中部入學測驗
5/23(六)09:00~12:00

(A) 0.01

(B) 0.1

(C) 10

(D) 100。

詳解：(1) 100 按 x^2 得 10 ($\sqrt{100} = 10$)

(2) 10 按 $1/x$ 得 0.1 ($\frac{1}{10} = 0.1$)

(3) 0.1 按 x^2 得 0.01 ($0.1^2 = 0.01$)

(4) 0.01 按 $\sqrt{}$ 得 0.1 ($\sqrt{0.01} = 0.1$)

(5) 0.1 按 $1/x$ 得 10 ($0.1 = \frac{1}{10}$ ， $\frac{1}{10}$ 的倒數為 10)

(6) 10 按 x^2 得 100 ($10^2 = 100$)

因此，以 $\sqrt{}$ 、 $1/x$ 、 x^2 的順序輪流按時，

每按 6 次螢幕顯示的數會變回 100，

由 $100 \div 6 = 16 \cdots \cdots 4$

可知按了第 100 下後螢幕顯示的數與按第 4 下的數相同，

此時螢幕所顯示的數為 0.1，故選(B)

3. (B)下列哪一個選項中的等式不成立？〔104. 會考〕

(A) $\sqrt{3^8} = 3^4$

(B) $\sqrt{(-5)^6} = (-5)^3$

(C) $\sqrt{3^4 \times 5^{10}} = 3^2 \times 5^5$

(D) $\sqrt{(-3)^4 \times (-5)^8} = (-3)^2 \times (-5)^4$ 。



詳解：(A) $\sqrt{3^8} = \sqrt{(3^4)^2} = 3^4$

(B) $\sqrt{(-5)^6} = \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3$

$\because \sqrt{(-5)^6}$ 為正數 $\therefore \sqrt{(-5)^6} \neq (-5)^3$

(C) $\sqrt{3^4 \times 5^{10}} = \sqrt{3^4} \times \sqrt{5^{10}} = \sqrt{(3^2)^2} \times \sqrt{(5^5)^2} = 3^2 \times 5^5$

(D) $\sqrt{(-3)^4 \times (-5)^8} = \sqrt{3^4 \times 5^8} = \sqrt{3^4} \times \sqrt{5^8} = \sqrt{(3^2)^2} \times \sqrt{(5^4)^2}$
 $= 3^2 \times 5^4 = (-3)^2 \times (-5)^4$

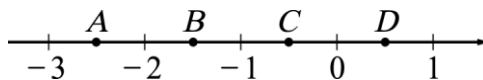
4. (B)如圖，數線上有 A、B、C、D 四點，根據圖中各點的位置，判斷哪一點所表示的數與 $11 - 2\sqrt{39}$ 最接近？〔103. 會考〕

(A) A

(B) B

(C) C

(D) D。



詳解： $2\sqrt{39} = \sqrt{156} \div 12. \dots \therefore 11 - 2\sqrt{39} \div 11 - 12. \dots \div -1. \dots$

即 $-2 < 11 - 2\sqrt{39} < -1$ 故 $11 - 2\sqrt{39}$ 最接近 B 點

5. ()下列哪一個選項中的等式成立？〔106. 會考〕

(A) $\sqrt{2^2} = 2$

(B) $\sqrt{3^3} = 3$

(C) $\sqrt{4^4} = 4$

(D) $\sqrt{5^5} = 5$ 。



同德高中部繁星說明會

5/23(六)10:00~12:00

詳解：(A) $\sqrt{2^2} = 2$

(B) $\sqrt{3^3} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{4^4} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{4^2} = 4 \times 4 = 16$

(D) $\sqrt{5^5} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{5} = 5 \times 5 \times \sqrt{5} = 25\sqrt{5}$



6. (D)算式 $(\sqrt{6} + \sqrt{10} \times \sqrt{15}) \times \sqrt{3}$ 之值為何？〔103. 會考〕

(A) $2\sqrt{42}$

(B) $12\sqrt{5}$

(C) $12\sqrt{13}$

(D) $18\sqrt{2}$ 。



同德高中部入學測驗

5/23(六)09:00~12:00

$$\begin{aligned}\text{詳解：} & (\sqrt{6} + \sqrt{10} \times \sqrt{15}) \times \sqrt{3} \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{150}) \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{18} + \sqrt{450} \\ &= 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} \\ &= 18\sqrt{2}\end{aligned}$$

7. (B)若一正方形的面積為 20 平方公分，周長為 x 公分，則 x 的值介於下列哪兩個整數之間？〔105. 會考〕

(A) 16, 17

(B) 17, 18

(C) 18, 19

(D) 19, 20。



同德高中部繁星說明會

5/23(六)10:00~12:00

詳解：∵ 正方形的面積為 20 平方公分

∴ 正方形的邊長為 $\sqrt{20}$ 公分

周長 $x = \sqrt{20} \times 4 = \sqrt{320}$ (公分)

∵ $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, 又 $17^2 < (\sqrt{320})^2 < 18^2$

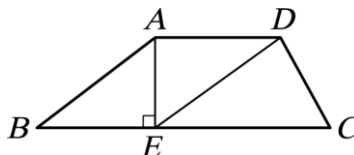
∴ $17 < \sqrt{320} < 18$, 即 $17 < x < 18$, 故選(B)



8. (C)如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， E 點在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 。

若 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BE} = 8$ ， $\overline{DE} = 6\sqrt{3}$ ，則 $\overline{AD}$ 的長度為何？〔103. 會考〕

- (A) 8
(B) 9
(C) $6\sqrt{2}$
(D) $6\sqrt{3}$ 。



詳解：(1) $\because \overline{AE} \perp \overline{BC} \therefore \triangle ABE$ 為直角三角形

$$\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

(2) $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$

$\therefore \overline{AE} \perp \overline{AD}$ ，故 $\triangle ADE$ 為直角三角形

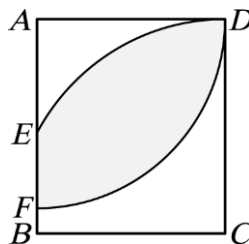
$$\overline{AD} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

9. (A)如圖，以矩形 $ABCD$ 的 A 為圓心， $\overline{AD}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{AB}$ 於 F 點；

再以 C 為圓心， $\overline{CD}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{AB}$ 於 E 點。若 $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{CD} =$

$\frac{17}{3}$ ，則 $\overline{EF}$ 的長度為何？〔105. 會考〕

- (A) 2
(B) 3
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{7}{3}$



詳解：連接 $\overline{EC}$ ，則 $\overline{EC} = \overline{CD} = \frac{17}{3}$

$$\text{由畢氏定理知 } \overline{BE} = \sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2 - 5^2} = \frac{8}{3}$$

$$\text{又 } \overline{AF} = \overline{AD} = 5$$

$$\therefore \overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF} = \frac{17}{3} - 5 = \frac{2}{3}$$



$$\text{故 } \overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$$

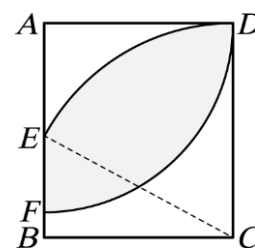
〈另解〉

$$\therefore \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE} - \overline{AB}$$

$$= \overline{AD} + \overline{BE} - \overline{CD}$$

$$= 5 + \frac{8}{3} - \frac{17}{3} = 2$$

故選(A)



同德高中部入學測驗
5/23(六)09:00~12:00



同德高中部繁星說明會
5/23(六)10:00~12:00

