數學科

同德高中

國中教育會考考前大特搜

第 2 期/編撰教師:柳源裕老師

特搜1- 三角形的重心

重要性:★★★★★

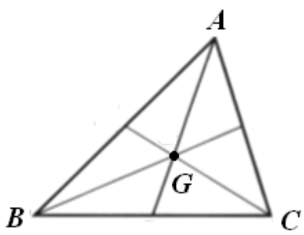
一、重心的意義：

三角形的質量(重量)集中的中心，稱為該三角形的重心。

二、重心的尺規作法：

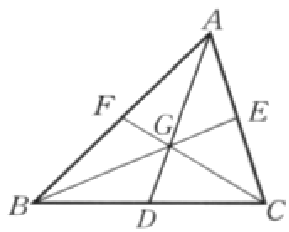
作三角形任兩邊的中線，其交點即為重心。

※ 三角形三中線會交於一點。



三、重心的位置：

三角形的重心必在此三角形的內部。



四、重心的性質：

如圖，若 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，則：

(1) 三中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 將 $\triangle ABC$ 分成6個等面積的小三角形。

(2) 三角形之重心與三頂點的連線將 $\triangle ABC$ 分成3個等面積的小三角形。

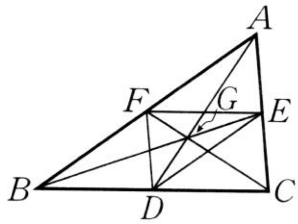
如圖，即 $\triangle AGB$ 面積 $=$ $\triangle BGC$ 面積 $=$ $\triangle CGA$ 面積。

(3) $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$；$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$；$\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$。

＜觀念延伸＞

如圖，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 將△ABC 之三中線，G 為△ABC 的重心，則：

1. G 亦為△DEF 的重心；
2. △DEF ~△ABC；
3. 面積△DEF $=\frac{1}{4}$ 面積△ABC。



五、直角三角形：

直角三角形△ABC 中，$\overline{BC}$、$\overline{AB}$為兩股長，$\overline{CA}$為斜邊，則：

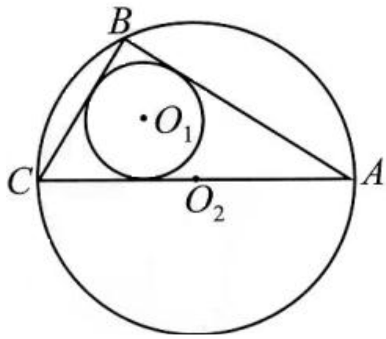
(1) 外接圓半徑 R ＝斜邊的一半

＝$\overline{CA}/2$

(2) △ABC 之內切圓半徑 r

＝(兩股相加減斜邊)/2

＝($\overline{BC}+\overline{AB}-\overline{CA}$)/2



六、正三角形：

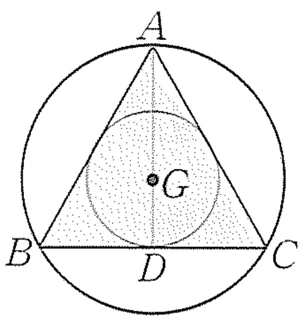
1. 正三角形的內心、外心、重心是同一點
2. 正△ABC 的邊長為 a，G 點是內心、外心、重心，則：

(1) 高 $\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

(2) 面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

(3) 外接圓半徑 $R=\overline{AG}=\frac{2}{3}$高。

(4) 內接圓半徑 $r=\overline{GD}=\frac{1}{3}$高。

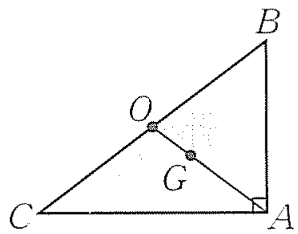


＜直角三角形的外心與重心＞

1. 直角三角形的外心到直角頂的距離＝斜邊中線長＝$\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。

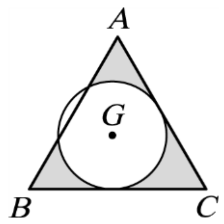
2. 直角三角形的重心到直角頂的距離＝$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AO}$。

3. 直角三角形的重心到外心的距離＝$\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{AO}$。



柳哥陪你考

1. （D）如圖，G 為△ABC 的重心。若圓 G 分別與 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 相切，且與 $\overline{AB}$ 相交於兩點，則關於△ABC 三邊長的大小關係，下列何者正確？〔103. 會考〕



（A）$\overline{BC}<\overline{AC}$

（B）$\overline{BC}>\overline{AC}$

（C）$\overline{AB}<\overline{AC}$

（D）$\overline{AB}>\overline{AC}$。

詳解：①設圓 G 與 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的切點分別為 D、E

連 $\overline{GD}$、$\overline{GE}$，則 $\overline{GD}\perp\overline{BC}$、$\overline{GE}\perp\overline{AC}$，且 $\overline{GD}=\overline{GE}=$半徑

②作 $\overline{GF}\perp\overline{AB}$ 於 F 點，則 $\overline{GF}<$半徑　$\therefore\overline{GD}=\overline{GE}>\overline{GF}$

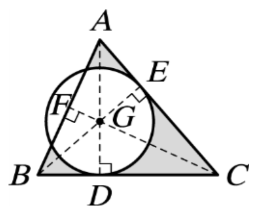
③連接 $\overline{AG}$、$\overline{BG}$、$\overline{CG}$

$\because$G 為△ABC 重心　$\therefore$△AGB＝△BGC＝△AGC

又 $\overline{GD}=\overline{GE}>\overline{GF}$

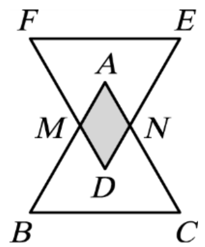
$\therefore\overline{BC}=\overline{AC}<\overline{AB}$

即 $\overline{AB}>\overline{AC}$

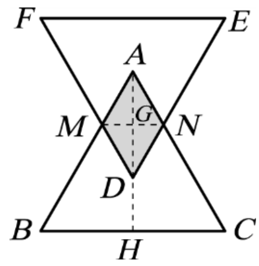


2. (C)如圖，D、A 兩點分別是兩正三角形 ABC、DEF 的重心，其中 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DF}$ 相交於 M 點，$\overline{AC}$ 與 $\overline{DE}$ 相交於 N 點。若△ABC 與△DEF 的面積均為 18，則四邊形 AMDN 的面積為何？〔98.基測Ⅱ〕

(A)2　(B)3　(C)4　(D)6。



詳解：如圖，連接 $\overline{MN}$ 、$\overline{AD}$，且延長 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 H 點



∴△AMN≅△DMN，$\overline{AD}=\frac{2}{3}\times\overline{AH}$

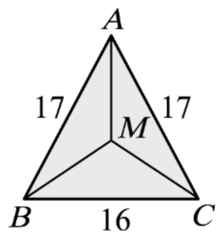
∴ $\overline{AG}=\overline{DG}=\frac{1}{3}\times\overline{AH}$

∴△AMN 面積 $=\frac{1}{9}\times$△ABC 面積 $=\frac{1}{9}\times18=2$（平方單位）

∴四邊形 AMDN 面積＝2×△AMN 面積＝2×2＝4（平方單位）

3. (B)如圖，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=17$，$\overline{BC}=16$，M 是△ABC 的重心，求 $\overline{AM}$ 的長度為何？〔101.基測〕

(A)8　(B)10　(C)$\frac{17}{2}$　(D)$\frac{289}{30}$。



詳解：∵△ABC 為等腰三角形

∴作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 得 $\overline{BD}=\overline{CD}=8$

$\overline{AD}=\sqrt{17^2-8^2}=15$，又 M 是△ABC 的重心

∴ $\overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\times15=10$