

國中教育會考考前大特搜

第 30 期 / 編撰教師：柳源裕老師



特搜 1-最大公因數與最小公倍數 重要性：★★★★★

一、因數與倍數：

1. 當正整數 a 能被正整數 b 整除，我們說 a 是 b 的倍數， b 是 a 的因數。
2. 1 和 -1 是任何整數的因數，反之，任何整數都是 1 和 -1 的倍數。
3. 任何異於零的整數的是自己本身最大的因數，也是自己本身最小的倍數。
4. 對於任意正整數 a ，因為 $0 = a \times 0$ ，所以 a 是 0 的因數，0 是 a 的倍數，

即 0 是任意正整數的倍數，任意正整數是 0 的因數。

※注意：0 不為任何整數之因數，且 0 為任何非零整數之倍數。

※注意：如果沒有特別指明，因數是指正因數，倍數是指正倍數；

但高中時，討論的因數將會包含正整數和負整數。

二、因數的判別：有一個正整數 A

1. 含有 2 的因數： A 的個位數為偶數者。(0、2、4、6、8)
2. 含有 4 的因數： A 的末尾兩位數字可被 4 整除者。
3. 含有 3 的因數： A 的各位數字和可以被 3 整除者。
4. 含有 9 的因數： A 的各位數字和可以被 9 整除者。
5. 含有 5 的因數： A 的個位數字為 0 或 5 者。
6. 含有 11 的因數： A 的奇位數字和與偶位數字和相減為 0 或 11 的倍數者。
7. 含有 7(或 13)的因數：

從 A 的個位數字起，向左分節，每三位為一節，



奇數節數字和減去偶數節數字和為 7(或 13)的倍數者。

★ 一個數字概念： $1001=7 \cdot 11 \cdot 13$ 。

三、質數與合數

1. 質數：一個大於1的整數，除了1和本身以外，沒有其他因數。
2. 合數：一個大於1的整數，除了1和本身以外，還有其他因數。
3. 1 不是質數，也不是合數。
4. 最小的質數是 2，也是所有質數中唯一的偶數；而最小的合數是 4。
5. 質數的檢驗法：

要檢驗一個正整數 a 是否為質數，只要檢驗到小於 $\sqrt{a}$ 的質數即可。

6. 1~100 的質數有 25 個：

2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、
53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。



四、質因數分解

1. 質因數：

如果一個正整數的因數是質數，則稱這個因數是這個正整數質因數。

2. 質因數分解：

將一個大於1的整數分解成質數乘積的動作，就是將此數做質因數分解。

3. 質因數分解的功用：

- (1) 求質因數個數：只要作完質因數分解，就可以看出有幾個質因數。
- (2) 求最大公因數與最小公倍數。
- (3) 求因數個數與因數總和

五、標準分解式：

如果我們把一個大於1的整數做質因數分解後，將比較小的質因數寫在前面，比較大的質因數寫在後面，並將相同的質因數乘積寫成乘方的型式，那麼我們稱這樣的表示法為該整數的標準分解式。

例： $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

六、最大公因數與最小公倍數：

1. 公因數：幾個正整數的共同因數，稱為這些正整數的公因數。
 - (1) 最大公因數($\gcd$)：用小括號()表示。
 - (2) 互質：當兩個數的最大公因數為1時，則稱此二數互質。
 - (3) 兩個相異質數必互質，但互質的兩個整數未必均為質數。
 - (4) 求法：(a) 短除法 (b) 質因數分解法 (c) 輾轉相除法
2. 公倍數：幾個正整數的共同倍數，稱為這些正整數的公倍數。
 - (1) 最小公倍數(lcm)：用中括號[]表示。
 - (2) 求法：(a) 短除法 (b) 質因數分解法
3. 若 a 、 b 為正整數，且 a 、 b 互質，則 $[a, b] = a \cdot b$ 。
4. 若 a 、 b 為正整數，則 $(a, b) \times [a, b] = a \cdot b$ 。
5. 利用最大公因數可以比大小。



同德高中部繁星說明會
5/23(六)10:00~12:00



柳哥陪你考

1. (A)下列選項中所表示的數，哪一個與 252 的最大公因數為 42？〔106. 會考〕

- (A) $2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$
 (B) $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$
 (C) $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$
 (D) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 。



同德高中部入學測驗
 5/23(六)09:00~12:00

詳解：252 = $2^2 \times 3^2 \times 7$ ，42 = $2 \times 3 \times 7$

- (A) $(2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2, 252) = (2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2, 2^2 \times 3^2 \times 7) = 2 \times 3 \times 7 = 42$
 (B) $(2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2, 252) = (2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2, 2^2 \times 3^2 \times 7) = 2 \times 3^2 \times 7 \neq 42$
 (C) $(2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7, 252) = (2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7, 2^2 \times 3^2 \times 7) = 2^2 \times 3 \times 7 \neq 42$
 (D) $(2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7, 252) = (2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7, 2^2 \times 3^2 \times 7) = 2^2 \times 3^2 \times 7 \neq 42$

2. (B)已知 a、b、c 為三正整數，且 a、b 的最大公因數為 12，a、c 的最大公因數為 18。若 a 介於 50 與 100 之間，則下列敘述何者正確？〔105. 會考〕

- (A) 8 是 a 的因數，8 是 b 的因數
 (B) 8 是 a 的因數，8 不是 b 的因數
 (C) 8 不是 a 的因數，8 是 c 的因數
 (D) 8 不是 a 的因數，8 不是 c 的因數。

詳解：(1) ∵ a、b 的最大公因數為 12

a、c 的最大公因數為 18

∴ a 為 12 和 18 的公倍數

又 12 和 18 的公倍數為 36

∴ a 為 36 的倍數

再由 a 介於 50 與 100 之間

可知 $a = 36 \times 2 = 72$

∴ 8 是 a 的因數



(2) $\because a、b$ 的最大公因數為 $12=2^2 \times 3$ 且 $a=72=2^3 \times 3^2$

$\therefore b$ 不可含有因數 $2^3=8$

因此 8 不是 b 的因數

(3) $\because a、c$ 的最大公因數為 $18=2 \times 3^2$ 且 $a=72=2^3 \times 3^2$

$\therefore c$ 不可含有因數 $2^3=8$

因此 8 不是 c 的因數

由(1)(2)(3)可知選(B)

3. (A)將甲、乙、丙三個正分數化為最簡分數後，其分子分別為 6、15、10，其分母的最小公倍數為 360。判斷甲、乙、丙三數的大小關係為何？〔104. 會考〕

(A) 乙 > 甲 > 丙

(B) 乙 > 丙 > 甲

(C) 甲 > 乙 > 丙

(D) 甲 > 丙 > 乙。



同德高中部繁星說明會

5/23(六)10:00~12:00

詳解：設甲、乙、丙的最簡分數分別為 $\frac{6}{a}$ 、 $\frac{15}{b}$ 、 $\frac{10}{c}$

其中 $(a, 6) = 1$ 、 $(b, 15) = 1$ 、 $(c, 10) = 1$

又 $[a, b, c] = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$\therefore a=5$ (a 不能有因數 2、3)

$b=2^3=8$ (b 不能有因數 3、5)

$c=3^2=9$ (c 不能有因數 2、5)

$\therefore \text{甲} = \frac{6}{a} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1.2$

$\text{乙} = \frac{15}{b} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} = 1.875$

$\text{丙} = \frac{10}{c} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9} \approx 1.1$

故 乙 > 甲 > 丙



4. (C)若 A 為一數，且 $A=2^5 \times 7^6 \times 11^4$ ，則下列選項中所表示的數，何者是 A 的因數？〔103. 會考〕

- (A) $2^4 \times 5$
 (B) $7^7 \times 11^3$
 (C) $2^4 \times 7^4 \times 11^4$
 (D) $2^6 \times 7^6 \times 11^6$ 。



同德高中部入學測驗
5/23(六)09:00~12:00

詳解： $A=2^5 \times 7^6 \times 11^4$

- (A)不是 $\because 5$ 不是 A 的因數
 (B)不是 $\because 7^7$ 不是 A 的因數
 (C)是 $\because 2^4$ 、 7^4 、 11^4 均是 A 的因數 $\therefore 2^4 \times 7^4 \times 11^4$ 是 A 的因數
 (D)不是 2^6 及 11^6 都不是 A 的因數

5. (B)若有一正整數 N 為 65、104、260 三個數的公倍數，則 N 可能為下列何者？〔102. 基測〕

- (A) 1300
 (B) 1560
 (C) 1690
 (D) 1800。

詳解： $\because [65, 104, 260] = 13 \times 5 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 520$

又 $1560 = 520 \times 3$

$\therefore$ 選(B)

13	65	104	260
5	5	8	20
4	1	8	4
	1	2	1



同德高中部繁星說明會
5/23(六)10:00~12:00

